Bestimmung der Hauptbrechungsquotienten von Galmei und unterschwefelsaurem Natron.

Von Dr. Victor v. Lang.

(Ausgeführt in dem k. k. physikalischen Institute.)

Die von Stokes [1]) und Sénarmont [2]) entwickelten Formeln [3]) setzen uns in den Stand, bei Prismen, welche parallel einer optischen Elasticitätsaxe geschnitten sind, auch die Minimum-Ablenkung der ausserordentlichen Welle zur Bestimmung der Hauptbrechungsquotienten zu verwenden. Sind die beiden Prismenflächen gleich gegen die Elasticitätsaxen orientirt, so geht beim Minimum der Ablenkung nun auch die ausserordentliche Welle gleichgeneigt zu beiden Prismenseiten also parallel einer Elasticitätsaxe hindurch und ihre Geschwindigkeit wird der den Prismenwinkel halbirenden Elasticitätsaxe entsprechen, wie schon aus einer einfachen Betrachtung der Wellenfläche hervorgeht. Man wird also durch derartige Prismen sogleich zwei Hauptbrechungsquotienten erhalten.

Aber auch für ganz beliebige Prismen, deren Seiten gleich gegen die Elasticitätsaxen orientirt sind, gilt, wie ich gezeigt habe[4]), der Satz, dass beim Minimum der Ablenkung jede Welle gleichgeneigt gegen beide Prismenseiten hindurch geht. In diesem Falle gehen die beiden Wellen entweder wieder parallel einer Elasticitätsaxe durch den Krystall (mit Geschwindigkeiten, welche den beiden anderen Elasticitätsaxen entsprechen) und geben wie früher sogleich zwei Hauptbrechungsquotienten, oder die beiden durchgehenden

---

[1]) Mathem. journ. of Cambridge. t. I.

[2]) Nouv. ann. de mathem. t. XVI.

[3]) Eine Ableitung dieser Formeln wurde auch von mir, Sitzungsberichte d. mathem.-naturw. Cl. Bd. XXXIII, S. 577, 1858, gegeben.

[4]) Sitzungsberichte d. mathem.-naturw. Cl. Bd. XXXIII, S. 115, 1858.

Wellen sind beim Minimum der Ablenkung wenigstens einem optischen Hauptschnitte parallel. Alsdann gibt die parallel der brechenden Kante polarisirte Welle den Hauptbrechungsquotienten, welcher der den brechenden Winkel halbirenden Elasticitätsaxe entspricht; der Brechungsquotient (n) der anderen Welle aber gibt folgende einfache Beziehung zwischen den beiden übrigen Hauptbrechungsquotienten δ, ε und dem Winkel v, welcher die Richtung der durchgehenden Welle mit der δ entsprechenden Elasticitätsaxe einschliesst,

$$\frac{1}{n^2} = \frac{\sin v^2}{\delta^2} + \frac{\cos v^2}{\varepsilon^2}$$

Die folgenden Bestimmungen der Hauptbrechungsquotienten von Galmei und unterschwefelsaurem Natron wurden mit Hilfe der vorhergehenden Sätze ausgeführt und die gute Übereinstimmung der aus diesen Quotienten berechneten Winkeln der optischen Axen mit den direct beobachteten Werthen derselben zeigt, dass diese Methoden grosser Genauigkeit fähig sind.

Galmei.

Die untersuchten Krystalle waren vom Altenberge, und ich bin für die Überlassung derselben Herrn E. Venator, Berg-Ingenieur in Aachen, welcher eine grosse und schöne Partie Galmeistücke von den dortigen Bergwerken zur Untersuchung an das k. k. Hof-Mineraliencabinet einschickte, zu grossem Danke verpflichtet.

Zur Bestimmung der Brechungsquotienten wurden zweierlei Prismen verwendet:

I. Prismen, parallel der Elasticitätsaxe b gebildet von den Flächen 301 und $\bar{3}01$ [1]).

II. Prismen, parallel a gebildet von der Fläche 031 und $0\bar{3}1$.

Da für beiderlei Prismen die Seiten gleich gegen die Elasticitätsaxen orientirt sind, so geben beide Wellen bei der Messung mittelst der Minimum-Ablenkung je einen Hauptbrechungsquotienten.

Die Grösse des brechenden Winkels (A) und die Werthe der Minimum-Ablenkung (D) für die einzelnen Prismen waren:

---

[1]) Die Flächen sind im Nachfolgenden nach den von Herrn Prof. Grailich und mir angenommenen Regeln bezeichnet. — Siehe Sitzungsberichte d. mathem.-naturw. Cl. Bd. XXVII, S. 3, 1858.

I. Prisma ‖ b.	1.	2.	3.
A	69° 51′	69° 52′	69° 51′
(ordentliche Welle)			
D_{ρ}	65 15	65 13	65 14
D_{γ}	65 42	65 40	65 46
$D_{\gamma\rho}$	66 20	66 15	66 16
(ausserordentliche Welle)			
D_{ρ}	68 25	68 30	68 32
D_{γ}	69 11	69 8	69 7
$D_{\gamma\rho}$	69 49	69 42	69 42

II. Prisma ‖ a.		4.	5.	6.
A	=	57° 40ʹ5	57° 11ʹ	57° 28ʹ5
(ordentliche Welle)				
D_{ρ}	=	44 17	43 40	44 1
D_{γ}	=	44 31	—	44 17
$D_{\gamma\rho}$	=	44 50	44 15	44 33
(ausserordentliche Welle)				
D_{ρ}	=	46 11	45 36	45 55
$D_{\gamma e}$	=	46 30	45 53	46 15
$D_{\gamma\rho}$	=	46 47	46 11	46 32

Aus diesen Winkeln ergeben sich folgende Werthe der Hauptbrechungsquotienten:

I. Prisma ‖ b.	1.	2.	3.	Mittel
α_{ρ} =	1·61434	1·61390	1·61424	1·61416
α_{γ} =	1·61694	1·61651	1·61733	1·61696
$\alpha_{\gamma\rho}$ =	1·62057	1·61985	1·62019	1·62020
γ_{ρ} =	1·63215	1·63235	1·63278	1·63242
γ_{γ} =	1·63628	1·63576	1·63592	1·63599
$\gamma_{\gamma\rho}$ =	1·63963	1·63876	1·63902	1·63914

II. Prisma ‖ a.	4.	5.	6.	Mittel
β_{ρ} =	1·61089	1·61063	1·61055	1·61069
β_{γ} =	1·61354	—	1·61361	1·61358
$\beta_{\gamma\rho}$ =	1·61713	1·61739	1·61665	1·61706
γ_{ρ} =	1·63231	1·63286	1·63218	1·63245
γ_{γ} =	1·63584	1·63609	1·63588	1·63594
$\gamma_{\gamma\rho}$ =	1·63898	1·63948	1·63905	1·63917

Die unbedeutende Abweichung der beiden Werthe für γ, welches nur mit Hilfe der ausserordentlichen Wellen bestimmt wurde, zeigt von der Brauchbarkeit dieser Methode.

Nimmt man aus diesen beiden Werthen das Mittel und rechnet alsdann die scheinbaren und wirklichen Winkel der optischen Axen, so erhält man folgende Übersicht:

	α	β	γ	(AB)	AB
Roth	1·61069	1·61416	1·63244	81° 7'	47° 30'
Gelb	1·61358	1·61696	1·63597	78 39	46 9
Grün	1·61706	1·62020	1·63916	76 3	44 42

Eine Platte senkrecht zur ersten Mittellinie (c) geschnitten, gab für die scheinbaren Winkel folgende Werthe:

	Roth	Gelb	Grün
$(AB) =$	81°3	78°7	76°0

welche mit obigen β auf den wirklichen Winkel reducirt geben

$$AB = 47^\circ\ 36' \quad 46^\circ\ 10' \quad 44^\circ\ 40'$$

Die Übereinstimmung der Beobachtung und Rechnung ist sehr befriedigend, um so mehr, als die Flächen der einzelnen Prismen keineswegs sehr gut spiegelten, und wegen der Kleinheit der Krystalle die Spectra sehr schwach waren.

Descloizeaux [1]) fand als Hauptbrechungsquotienten des Galmei für gelbes Licht:

$$\alpha = 1{\cdot}615 \quad \beta = 1{\cdot}618 \quad \gamma = 1{\cdot}635$$

und hieraus

$$(AB) = 78^\circ\ 20', \quad AB = 45^\circ\ 57'$$

Unterschwefelsaures Natron.

Zur Bestimmung des Brechungsquotienten γ wurde ein Prisma gebildet von den Flächen 211 und $\bar{2}1\bar{1}$ verwendet. Da diese beiden Flächen gleich gegen die Elasticitätsaxen orientirt sind, so gibt nach dem vorhergehenden die parallel der Kante polarisirte Welle bei dem Minimum ihrer Ablenkung den Hauptbrechungsquotienten in Betreff der den brechenden Winkel halbirenden Elasticitätsaxe (hier c). Ich fand also für die parallel der Kante polarisirte Welle

$$A = 42^\circ\ 18'\ 20''$$
$$D_\rho = 24^\circ\ 1', \quad \gamma_\rho = 1{\cdot}51583$$
$$D_\gamma = 24\ \ 9, \quad \gamma_\gamma = 1{\cdot}51853$$
$$D_{\gamma\rho} = 24\ \ 17, \quad \gamma_{\gamma\rho} = 1{\cdot}52122$$

[1]) Ann. d. mines, t. XIV, 1858.

Ferner wurde ein Prisma b, gebildet von den Flächen 010 und $1\bar{1}0$ der Messung unterzogen. Die ordentliche Welle gab sogleich den Brechungsquotienten β; aus dem Werthe der Minimum-Ablenkung der ausserordentlichen Welle aber wurde nach den Eingangs erwähnten Formeln [1]) mit Hilfe des schon bekannten γ der Brechungsquotient α bestimmt. Es war

$$A = 44^\circ\ 49'$$

(ordentliche Welle)

$$D_\rho = 24^\circ\ 33', \quad \beta_\rho = 1{\cdot}49274$$
$$D_\gamma = 24\ \ 41, \quad \beta_\gamma = 1{\cdot}49525$$
$$D_{\rho\gamma} = 24\ \ 49, \quad \beta_{\gamma\rho} = 1{\cdot}49776$$

(ausserordentliche Welle)

$$D_\rho = 24^\circ\ \ 9, \quad \alpha_\rho = 1{\cdot}48031$$
$$D_\gamma = 24\ \ 15, \quad \alpha_\gamma = 1{\cdot}48200$$
$$D_{\rho\gamma} = 24\ \ 21, \quad \alpha_{\gamma\rho} = 1{\cdot}48384$$

Aus diesen Brechungsquotienten ergeben sich nun folgende Werthe für die scheinbaren und wirklichen Winkel der optischen Axen:

	α	β	γ	(AB)	AB
Roth	1·4803	1·4927	1·5158	126° 22'	73° 26'
Gelb	1·4820	1·4953	1·5185	131 52	75 14
Grün	1·4838	1·4978	1·5212	135 58	76 28

---

[1]) Stellt man diese Formeln zur logarithmischen Berechnung geeignet um, so findet man

$$\tan\varphi = \frac{\varepsilon\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{A+D}{2}}, \quad \tan\psi = \frac{\varepsilon\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{A+D}{2}}$$

$$\tan M = \tan\theta\,\frac{\cos\varphi}{\cos\psi}\sqrt{\frac{\cos 2\psi}{\cos 2\varphi}}, \quad \tan L = \tan M\,\frac{\tan\frac{A+D}{2}}{\tan\frac{A}{2}}$$

$$\delta = \frac{\sin\frac{A+D}{2}}{\sin\frac{A}{2}} \cdot \frac{\cos L}{\cos M}$$

δ und ε sind die beiden Hauptbrechungsquotienten, zwischen denen der Brechungsquotient der ausserordentlichen Welle schwankt; θ der Winkel den die Halbirungslinie des brechenden Winkels mit der δ entsprechenden Elasticitätsaxe einschliesst. Im obigen Falle ist $\theta = \frac{A}{2}$.

Herr Professor J. Grailich und ich [1]) fanden durch Messung im Öl für den scheinbaren Winkel die Werthe

$$(AB)_\rho = 126^\circ\ 38'$$
$$(AB)_{\beta\lambda} = 134\quad 40$$

was mit Obigem gut stimmt.

Man kann den wirklichen Winkel der optischen Axen bei diesem Salze auch dadurch noch finden, dass man den Winkel der optischen Axe bei ihrem Austritte durch die Prismenflächen in die Luft misst.

Nennt man X den beobachteten Winkel (über die erste Mittellinie liegend); P den Normalenwinkel der Prismenflächen ebenfalls über die erste Mittellinie; φ den Winkel einer wahren optischen Axe mit der nächsten Normale auf eine Prismenfläche; ψ den Winkel dieser Normalen mit der in Luft austretenden Axe: so erhält man, wenn β den mittleren Brechungsquotienten der betreffenden Farbe bedeutet, zur Bestimmung von AB die Gleichungen

$$\varphi = \frac{P - AB}{2}; \quad \psi = \frac{P - X}{2}$$

$$\sin \frac{P - AB}{2} = \frac{1}{\beta} \sin \frac{P - X}{2}$$

Ich fand nun $\frac{P}{2} = 44^\circ\ 49'$, hieraus endlich

	Roth	Gelb	Grün
$X =$	65°5	67°5	69°5
$AB =$	73·32′	74·53′	76·14′

Zur Bestimmung des Brechungsquotienten a hätte man auch die zweite senkrecht zur brechenden Kante polarisirte Welle des ersten Prisma's (211) ($\bar{2}1\bar{1}$) benutzen können. Beim Minimum der Ablenkung ist die durchgehende Welle nämlich parallel dem Hauptschnitte $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ und macht, wie man aus den Axenlängen [2]) leicht findet (da die Einfalls- und Brechungsebene senkrecht zur brechenden Kante ist), mit der Axe $\mathfrak{b}$ einen Winkel $v = 49^\circ\ 55'$.

Die allgemeine Gleichung für die Geschwindigkeit (p) wo eine Welle

$$\frac{\cos u^2}{p^2 - \mathfrak{a}^2} + \frac{\cos v^2}{p^2 - \mathfrak{b}^2} + \frac{\cos w^2}{p^2 - \mathfrak{c}^2} = 0,$$

---

[1]) Sitzungsberichte d. mathem.-naturw. Cl. Bd. XXVII. S. 20. 1858.

[2]) $a : b : c = 1 : 0{\cdot}9913 : 0{\cdot}5999$ Heeren. Pogg. VII. 76.

u, v, w die Winkel der Wellennormale mit den Elasticitätsaxen bedeuten, wird also in unserem Falle, da $w = 90°$ und $\cos u^2 + \cos v^2 = 1$,

$$p^2 = b^2 \sin v^2 + a^2 \cos v^2$$

und durch die Geschwindigkeit des Lichtes in der Luft beide Theile der Gleichung dividirt, erhält man

$$\frac{1}{p^2} = \frac{\sin v^2}{\beta^2} + \frac{\cos v^2}{\alpha^2}$$

Ich fand nun für diese Welle

$$A = 42° \; 18' \; 20''$$
$$D_\rho = 22 \quad 36$$

Da aber $\beta'_\rho = 1{\cdot}4927$ mit Hilfe des zweiten Prisma's gefunden wurde und $v = 49° \; 55'$ ist, so gibt obige Gleichung

$$\alpha_\rho = 1{\cdot}4791.$$

Dieser Werth von α aber, welcher von dem früher gefundenen etwas abweicht, wurde verworfen.

Das Prisma (211) ($\bar{2}1\bar{1}$) gestattete nämlich keine genaue Messung, da die beiden Flächen ziemlich weit von einander abstehend in keiner Kante zusammentreffen.
